Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas 3 (MA-1116)
3^{er} Examen Parcial (30 %)
Sep-Dic 2023

Tipo Unico

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. Sea $T : P_2 \to P_3$ la transformación lineal dada por

$$T(ax^2 + bx + c) = (15a + 16b - 9c)x^3 + (3a - b + c)x + 2c - 3b$$

   a) Demuestre que T es una transformación lineal **(1 pto.)**
   b) Encuentre la matriz A_T asociada en las bases canónicas **(2 ptos.)**
   c) Encuentre una base para el núcleo de T **(2 ptos.)**
   d) Si $B_1 = \{4x^2 + 3, -x^3 + 1, -x^2 - 3x, -x^2 + 2x\}$ es otra base, exprese $T(x^2 - x)$ en función de B_1 **(4 ptos.)**

2. **(10 ptos.)** Sea el espacio vectorial $V = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 3} : A \text{ es triangular superior}\}$ y

$$H = \{A \in V : a_{12} + a_{13} + a_{23} = 0 \wedge \mathrm{Tr}(A) = 2a_{22}\}$$

   con el producto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB*)$

   a) Encuentre una base ortonormal para $H^\perp$.
   b) Para $E = \begin{pmatrix} i & 2i & -3 \\ 0 & -5i & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, encontrar $F \in H$, $G \in H^\perp$ tal que $E = F + G$

3. **(9 ptos.)** Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & i & -\sqrt{38}i \\ -i & 2 & \sqrt{19} \\ \sqrt{38}i & -\sqrt{19} & 1 \end{pmatrix}$

a) Encuentre los autovalores λ_i de la matriz A.

b) Encuentre los autovectores correspondientes a cada autovalor λ_i.

c) Construya y compruebe que $A = C^{-1}DC$.

4. **(2 ptos c/u.)** Determina si las siguientes proposiciones son **VERDADERAS** o **FALSAS**.

   a) Sea A una matriz idempotente de orden 3, tal que $\lambda_1 = 1$ es una raíz simple de la ecuación $\det(A - \lambda I_3) = 0$. Se verifica que $\dim[E_{\lambda_2=0}] = 2$.

   b) Si $T_A, T_B : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ son aplicaciones lineales y $\rho(T_A) = 4$, $\rho(T_B) = 3$ entonces la nulidad de la composición es $v(T_A \circ T_B) \geq 2$.

   c) Para toda $k \in \mathbb{R}$ la matriz $\begin{pmatrix} 6 & -6i \\ ki & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.